

**Roman MESTRE et Michel TERRAZA**

« Analyse de l'instabilité du Beta de la Droite de Marché  
par une Régression Forward  
avec Fenêtre Tempo-Fréquentielle »

**WP MRE 2019.2**

Montpellier Recherche en Economie EA 7491 – Faculté d'Économie  
Université de Montpellier - MUSE « Montpellier Université d'Excellence »  
Contact : [alain.marciano@umontpellier.fr](mailto:alain.marciano@umontpellier.fr)

# Analyse de l'instabilité du Beta de la Droite de Marché par une Régression Forward avec Fenêtre Tempo-Fréquentielle

Roman MESTRE\*

Michel TERRAZA^

## Abstract :

La Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielle qui réalise simultanément les décompositions discrètes en ondelettes des séries chronologiques d'un modèle de régression et son estimation, est un outil puissant dont l'utilisation est rendue possible grâce au progrès des logiciels de calculs. Dans l'étude que nous proposons, cette conjugaison permet l'étude de la stabilité (ou instabilité) du coefficient Beta de la Droite de Marché selon différents horizons d'investissement que nous appelons Betas Tempo-Fréquentiels. Nous l'appliquons aux séries des cours boursiers de 30 actions cotées sur le CAC40 sur une période journalière de 10 ans (2005-2015). Nous comparons nos résultats avec ceux issus des Betas Roulants du MEDAF Global (sans ondelettes). Nous montrons ainsi que les Betas de long-terme, très volatiles, diffèrent totalement de ceux de court terme et de ceux issus du modèle global. Les Betas de court-terme se rapprochent plutôt de ceux estimés sans les ondelettes et sont moins volatiles. Nous retenons la segmentation des Betas par rapport à un issu du modèle global pour spécifier à l'aide de la régression forward avec fenêtre tempo-fréquentielle la robustesse ou au contraire l'instabilité de la droite de marché des différentes actions. Notre étude montre qu'à court-terme, les Profils sont robustes pour les actions avec un Beta supérieur ou inférieur à 1 et non-robustes pour celles dont le Beta tend vers 1. A long-terme, la forte volatilité dégrade la robustesse des actions possédant un Beta inférieur ou égal à 1 alors que ce constat est à relativiser pour les actions ayant un beta plus élevé.

**Mots-Clés** : Régressions roulantes temps fréquence, ondelettes, betas fréquentiels instables,

**JEL codes** : G00, G11, G12

---

**1** \*Corresponding author. Roman MESTRE, MRE , Université de Montpellier, UFR d'économie Avenue Raymond Dugrand– Site de Richter C.S. 79606 34960 Montpellier CEDEX 2 Courriel : [roman.mestre@live.fr](mailto:roman.mestre@live.fr). Groupe de Recherche en Econométrie des Marchés

^ MRE, Université de Montpellier

La Régression Roulante (Forward ou Backward) est une méthode fort ancienne utilisée en économétrie essentiellement pour analyser la robustesse des modèles. Elle consiste simplement à sélectionner une fenêtre d'observations constante que l'on fait rouler, en avant ou en arrière, sur l'axe du temps en estimant à chaque pas les paramètres du modèle. On obtient, de la sorte, un ensemble d'informations sur l'évolution des caractéristiques du modèle qui permettent de vérifier des hypothèses posées a priori comme l'absence de rupture ou encore la constance des paramètres. Cette méthode connaît un regain d'intérêt ces dernières années dans divers domaines de l'économie comme celui de la finance qui rassemble des bases de données où le nombre d'observations est conséquent ce qui conduit à une utilisation plus efficace de la Régression Roulante. L'étude de la volatilité de différents paramètres qui jouent un rôle crucial dans la mesure du risque lors de la construction de portefeuilles boursiers en est un exemple. On l'utilise ainsi dans la Théorie de Sharpe et de sa représentation mathématique la Droite de Marché qui met en relation les rendements d'une action avec ceux d'un indice de référence. Dans ce modèle de régression simple le paramètre Beta est, par hypothèse, d'espérance mathématique et de variance constante et les concepteurs de portefeuilles sont supposés avoir un même comportement face au risque qu'ils soient traders ou fondamentalistes.

La littérature financière, à travers ses applications empiriques utilisant la technique de la fenêtre roulante, ne vérifie pas ces hypothèses et a mis au contraire en évidence l'instabilité du Beta du MEDAF. On peut se référer aux travaux de Faff et al (1992-1998), de Brooks et al (1992-1998) mais surtout de Groenewold et Fraser (1997) puis de Yeo (2001) qui comparent l'utilisation des processus GARCH, des fenêtres roulantes et du filtre de Kalman-Bucy pour estimer le Beta au cours du temps. Par ailleurs, Gençay et al (2003) montrent sur des données américaines que les betas se différencient selon les fréquences d'investissement obtenues par des décompositions en ondelettes. Cette approche de l'analyse temps-fréquence a été élaborée en 1909 par Haar et améliorée par Gabor en 1946. Elle constitue une avancée méthodologique décisive dans le traitement fréquentiel du signal. Vulgarisée sous le nom d'ondelettes, elle permet d'isoler les différentes fréquences d'une chronique tout en étudiant leurs évolutions au cours du temps. Elle est devenue, de ce fait, l'instrument privilégié pour prendre en compte l'hypothèse comportementale d'hétérogénéité des agents lors de la constitution de leurs portefeuilles et a permis la construction, par exemple, de la WVaR (Wavelets Value-at-Risk).

L'utilisation des Fenêtres Roulantes Forward associée aux ondelettes constitue ainsi un instrument efficace pour analyser l'instabilité fréquentielle du MEDAF. Une approche intuitive consiste à appliquer directement la Fenêtre Roulante sur les outputs de la décomposition fréquentielle<sup>1</sup>. Cela revient à considérer que la décomposition en ondelettes est unique sur la période globale de l'étude ce qui est contestable et l'utilisation traditionnelle de la fenêtre roulante sur cette décomposition conduit à des résultats insatisfaisants. Il est préférable, conceptuellement, de lui substituer une Fenêtre Tempo-Fréquentielle Roulante qui décompose à chaque pas de temps les rendements boursiers en ondelettes. Nous appliquons cette méthodologie pour estimer et analyser la volatilité fréquentielle des Betas des Droites de Marché de 30 actions françaises cotées sur le CAC40 pour la période journalière 2005-2015 (N=2869).

Dans une première partie nous rappelons les aspects théoriques des ondelettes et nous montrons, sur un échantillon de la base de données, les différences existantes entre les deux approches utilisant la fenêtre roulante fréquentielle. Dans une deuxième partie nous appliquons la Fenêtre Tempo-Fréquentielle pour étudier l'instabilité des Betas.

## **I) Aspects théoriques des ondelettes : une comparaison des fenêtres tempo-fréquentielles appliquées au MEDAF**

La droite de marché découlant du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF) de Sharpe (1962) s'écrit :

$$y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + \varepsilon_t$$

Avec  $y_t$  et  $x_t$  des processus aléatoires stationnaires représentant respectivement les rendements de l'actif et du marché et  $\varepsilon_t$  un processus *i.i.d.*  $(0, \sigma_\varepsilon)$ . Les paramètres, estimés par les MCO ou le Maximum de Vraisemblance, sont par hypothèse des estimateurs BLUE qui peuvent, dans ce cas, être utilisés pour réaliser différentes études empiriques.

Ce modèle suppose que le risque systématique estimé est constant et identique quel que soit l'horizon de placement des investisseurs. Il ne prend pas en considération sa variabilité temporelle mais aussi l'hypothèse comportementale d'hétérogénéité des agents. En recourant aux régressions roulantes nous pouvons évaluer ce risque au cours du temps et les ondelettes permettent de l'estimer sur plusieurs échelles fréquentielles.

## 1) Présentation théorique des ondelettes

La technique des ondelettes est un outil mathématique permettant de réduire l'arbitrage temps-fréquence. En effet, la Transformée de Fourier impose de choisir son degré de localisation temporelle ou fréquentielle, alors que les décompositions en ondelettes se basent sur une fonction particulière notée  $\psi(t)$  (l'*ondelette-mère*) qui est de moyenne nulle et qui préserve l'énergie/variance de la série de départ. Elle est translatée et dilatée par les paramètres  $s$  et  $\tau$  définissant la position fréquentielle et temporelle de la série, et permet de constituer la famille d'ondelettes  $\psi_{\tau,s}(t)$  :

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

Le processus de Transformation permet ainsi de calculer les coefficients d'ondelettes  $W(s, \tau)$  par une projection de la fonction  $x(t)$  sur la famille  $\psi_{\tau,s}(t)$  (i.e. le produit scalaire).

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = \langle x(t), \psi_{\tau,s}(t) \rangle$$

Avec  $\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$  le complexe conjugué de  $\psi_{\tau,s}(t)$ .

Cette décomposition continue en ondelettes (ou CWT) est développée théoriquement par Gabor en 1946 et popularisée par Morlet et Grossman (1984) puis par Meyer (1986). Une adaptation des transformations en ondelettes dans le cas discret permet des décompositions plus rapide et simple à mettre en œuvre via une échelle fréquentielle dyadique. On utilise, plus couramment, une version discrétisée particulière appelée Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT) qui possède des propriétés intéressantes permettant de choisir le degré de résolution et d'améliorer l'analyse de la variance (Cf. les travaux de Mallat (1989) et de Daubechies (1992)). La décomposition s'opère par un filtrage successif de la série et par une remise à l'échelle des outputs du filtre. Ce procédé est connu sous le nom d'Algorithme en Cascade de Mallat (1989-2009). A l'issue de la décomposition on obtient une segmentation fréquentielle de la série d'origine en plusieurs bandes de fréquences notées  $D_j$  pour  $j=1, \dots, J$  reliées à un horizon temporel. Le nombre maximal de bandes de fréquence  $J$  nécessaire pour la décomposition se calcule selon la formule :  $J = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}(2)}$  (voir Table A1 en annexes).

La décomposition additive en ondelettes discrètes permet de reconstruire la série temporelle de départ  $x_t$  selon :  $x_t = S_J + \sum_{j=1}^{J-1} D_j$

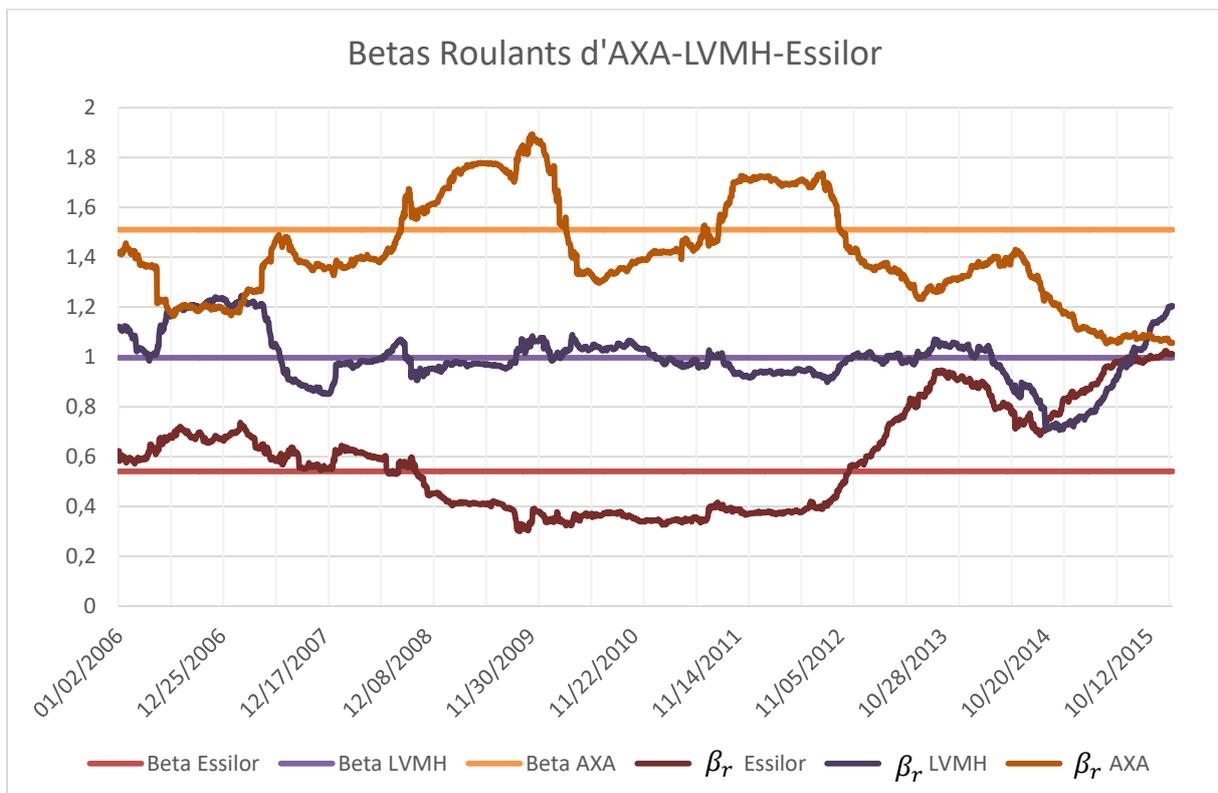
La chronique est la somme d'une approximation  $S_J$  et de bandes de fréquences de résolution différentes (c'est-à-dire attachées à divers horizons temporels). La décomposition discrète fournit des sous-chroniques sur lesquelles il est possible d'estimer le Beta de la Droite de Marché et d'appliquer la fenêtre roulante intuitive et la fenêtre tempo-fréquentielle pour étudier son instabilité. Ces régressions roulantes Forward à fenêtre fixe sont de longueur 260 jours qui correspondent, pour des observations journalières financières, à 1 année de trading. Nous définissons ainsi les Betas suivants :

- $\beta$  est l'estimation traditionnelle par les MCO du paramètre de la Droite de Marché qui est par construction fixe au cours du temps.
- $\beta_r$  correspond aux Betas Roulants estimés sans recourir à la décomposition fréquentielle. Ce sont les Betas des Régressions Roulantes du modèle  $y_{t,i} = \alpha_i + \beta_i x_{t,i} + \varepsilon_t$  Avec  $i$  l'indice des actions retenues dans la base de données
- $\beta_F$  représente les Betas Roulants fréquentiels estimés à partir de l'équation précédente avec la fenêtre à observations constantes (méthode intuitive) qui glisse le long des bandes de fréquence issues des décompositions en ondelettes des séries.
- $\beta_{TF}$  sont les Betas Roulants tempo-fréquentiels estimés avec des décompositions en ondelettes à chaque glissement de la fenêtre. Les ondelettes devant respecter les propriétés de conservation de l'énergie et la nullité de la moyenne, nous vérifions qu'il y a concordance entre la taille de la régression et le nombre de points utilisés pour la décomposition. Dans la procédure précédente il peut arriver que ces propriétés ne soient pas respectées ce qui peut introduire des biais dans les estimateurs des paramètres du modèle.

## 2) Comparaisons des estimations tempo-fréquentielles du Beta :

L'estimation de la Droite de Marché nécessite, pour le calcul de  $\beta$  et  $\beta_r$ , de vérifier la stationnarité des rendements des actions et de l'indice CAC40 pour la période 2005 – 2015<sup>2</sup>. Nous retenons, pour simplifier l'exposé, les actions AXA, LVMH et Essilor qui ont des betas respectivement inférieur, égal et supérieur à 1. La Figure 1 illustre les évolutions des différents Profils-Risque pour les trois actions : AXA amplifie les mouvements du Marché (Risque Fort), Essilor les atténue (Risque Faible), et LVMH réplique les fluctuations du CAC40 (Risque Unitaire). La fenêtre roulante forward permet bien d'apprécier l'instabilité plus ou moins forte des Betas des actifs.

*Figures 1 :  $\beta_r$  d'AXA, LVMH et Essilor*

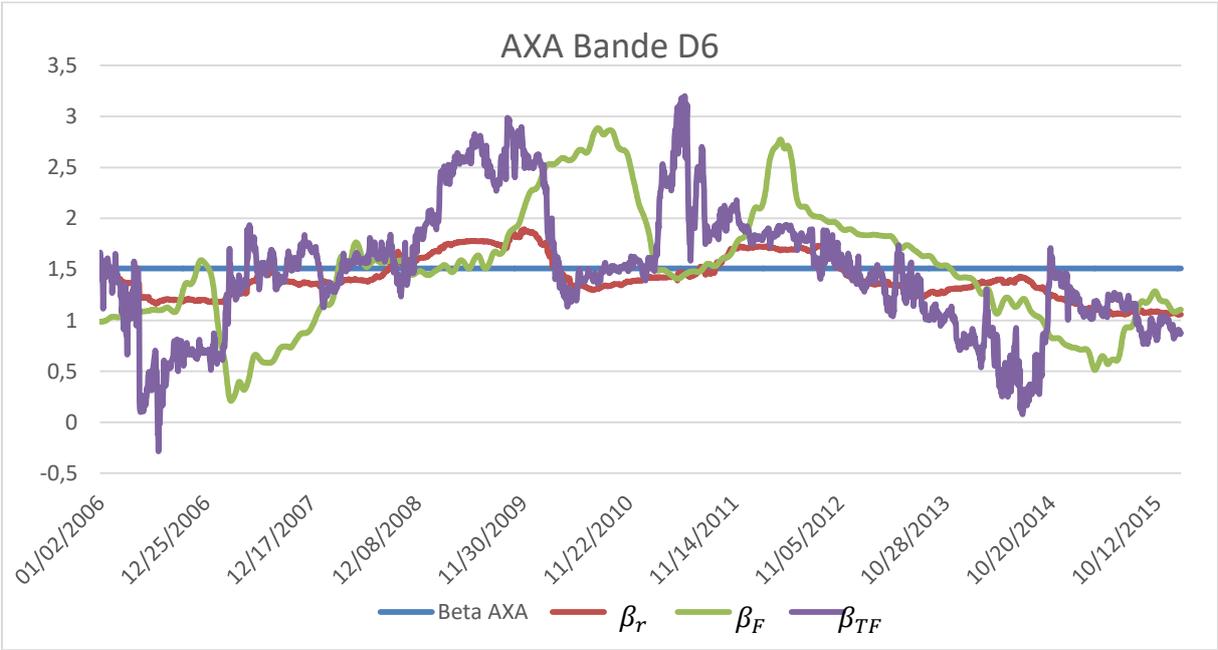
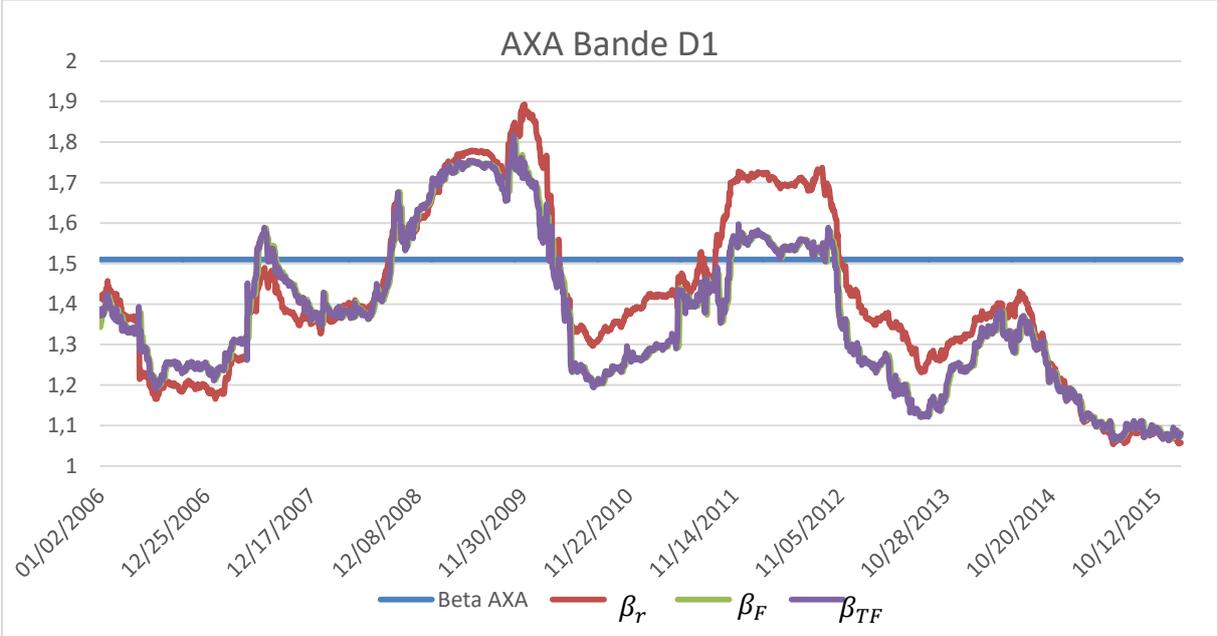


### - Estimations des Betas roulants $\beta_F$ et $\beta_{TF}$

Les différences entre les deux approches fréquentielles pour analyser l'instabilité du Betas sont obtenues par l'estimation des Droites de Marché fréquentielles avec les fenêtres roulantes associées.

Les Figures 2 illustrent graphiquement la volatilité du Beta de l'action AXA pour la bande D1 et D6 qui représentent respectivement les comportements de court et de moyen-terme des gestionnaires de portefeuilles. Nous représentons aussi le Beta des MCO et les  $\beta_r$  afin de compléter les comparaisons. Les résultats pour les deux autres actions, qui présentent les mêmes caractéristiques, sont consignés dans l'annexe A2.

*Figures 2 : Betas roulants  $\beta_r$ ,  $\beta_F$  et  $\beta_{TF}$  d'AXA :*



Les volatilités illustrées par les  $\beta_F$  et les  $\beta_{TF}$  sont confondues sur la bande D1 et parfaitement différentes sur la bande D6. On remarque aussi un résultat similaire en les comparant avec les  $\beta_r$ : à long-terme la dynamique des  $\beta_F$ , des  $\beta_{TF}$  et des  $\beta_r$  sont différentes tandis qu'à court-terme on note des différences moins marquées.

Afin d'analyser plus en détails ces différences selon les différentes bandes de fréquences, nous calculons les moyennes absolues des différences entre leurs Betas Roulants (Cf. Tables 2).

*Table 2 : Erreur Moyenne Absolue entre les Betas.*

	MAE entre	D1	D2	D3	D4	D5	D6
AXA Beta > 1	$\beta_r$ et $\beta_F$	0,07	0,08	0,13	0,18	0,33	0,39
	$\beta_r$ et $\beta_{TF}$	0,07	0,08	0,11	0,17	0,28	0,35
	$\beta_F$ et $\beta_{TF}$	0,01	0,03	0,06	0,13	0,3	0,59
Essilor Beta < 1	$\beta_r$ et $\beta_F$	0,04	0,07	0,09	0,17	0,26	0,35
	$\beta_r$ et $\beta_{TF}$	0,04	0,07	0,09	0,15	0,20	0,30
	$\beta_F$ et $\beta_{TF}$	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,41
LVMH Beta = 1	$\beta_r$ et $\beta_F$	0,04	0,05	0,12	0,19	0,16	0,30
	$\beta_r$ et $\beta_{TF}$	0,04	0,05	0,11	0,17	0,17	0,31
	$\beta_F$ et $\beta_{TF}$	0,01	0,02	0,05	0,12	0,14	0,35

$$(MAE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j| \text{ pour } i = r, F, TF \text{ et } j = r, F, TF \text{ tel que } i \neq j \text{ et } T = \text{nombre de Betas roulants})$$

En moyenne les différences entre les deux méthodes ( $\beta_F$  et  $\beta_{TF}$ ) sont plus importantes sur les bandes de Basses-Fréquences (horizon long) que sur celles des Hautes-Fréquences (D1-D2) et elles s'accroissent globalement des Hautes aux Basses fréquences. Les différences plus importantes entre les  $\beta_r$  et les autres Betas quelles que soient les fréquences justifient l'utilisation de l'analyse fréquentielle pour l'étude de l'instabilité.

Les différences entre les deux fenêtres roulantes fréquentielles lors de l'étape d'estimation sont dues en partie à l'inéquation entre la taille de fenêtre (260 points) et le nombre de points support de la décomposition (2800 points). La fenêtre tempo-fréquentielle remet à l'échelle les coefficients d'ondelettes à chaque glissement. Elle est conceptuellement plus adaptée que l'utilisation intuitive parce qu'elle réalise simultanément la régression et les décompositions en ondelettes. Par ailleurs, elle apparaît plus pratique pour une gestionnaire de portefeuille qui n'a pas à décomposer préalablement ses séries pour l'utiliser parce que la régression et la transformation en ondelettes s'effectuent de manière concomitante à chaque étape.

## II) Analyse de l'instabilité des Betas par la Fenêtre Tempo-Fréquentielle.

La Fenêtre Tempo-Fréquentielle est à présent utilisée pour étudier l'instabilité des Betas<sup>3</sup> de l'ensemble des actions de la base de données. Les Tableaux 3 consignent les évolutions des Betas Roulants  $\beta_r$  et des Betas tempo-fréquentiels  $\beta_{TF}$  des 30 actions pour les bandes D1 et D6 (en ligne). Nous mentionnons les valeurs des Betas Statiques estimés par les MCO et leurs t-stat à 1 dans les deux premières colonnes pour établir les Profils-Risque initiaux. La volatilité (Faible-Moyenne-Forte) des  $\beta_r$  et  $\beta_{TF}$  est caractérisée par l'Ecart-Type (colonne ET) des chroniques de des betas roulants. Dans les colonnes suivantes nous indiquons les pourcentages de Betas significativement inférieurs, supérieurs et égaux à 1 et ceux significativement inférieurs et égaux à 0 (sensibilité nulle ou contracyclique) afin d'apprécier la robustesse du Profil-Risque. Ce dernier est donc qualifié de Robuste dans le temps si une grande majorité des Betas se trouve dans la même catégorie que le Beta fixe des MCO (et inversement Non Robuste). Dans la dernière colonne, afin de simplifier l'interprétation de nos résultats nous effectuons une synthèse qualitative.

*Tableaux 3 : Volatilités des Betas*

### 3.1 : Pour les actions avec un $\beta = 1$

Action avec Beta = 1	Beta Global	tstat à 1	ET	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <0	% beta = 0	Commentaires
Accor	0,99	-0,52	0,21	59,41	8,93	31,66	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Accor D1	0,91	-4,53	0,22	64,01	16,06	19,93	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Accor D6	1,18	8,77	0,6	38,10	4,60	48,68	5,06	3,56	Non Robuste très forte Volatilité
LVMH	1,00	-0,21	0,11	27,75	51,78	20,47	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité Plutot faible
LVMH D1	0,98	-1,62	0,10	37,14	41,70	21,16	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité Plutot faible
LVMH D6	0,97	-2,60	0,40	43,56	11,86	42,81	1,57	0,23	Non Robuste forte Volatilité
Cap Gemini	1,04	1,80	0,19	36,60	18,86	44,54	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Cap Gemini D1	0,98	-0,96	0,18	53,12	7,67	39,21	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Cap Gemini D6	1,18	9,59	0,47	38,29	7,51	51,78	1,30	1,11	Non Robuste forte Volatilité

Les lignes bleues correspondent aux résultats obtenus pour les  $\beta_r$ .

Les actions sont classées d'après la valeur de leur Beta estimé par les MCO appelé Beta Global dans les tableaux. Ce dernier correspond donc à une estimation fixe du Beta définissant le profil-risque initial. La colonne ET consigne les Ecart-types des chroniques  $\beta_r$  et  $\beta_{TF}$ .

### 3.2 : Pour les actions avec un $\beta < 1$

Action avec Beta < 1	Beta Global	tstat à 1	ET	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <0	% beta = 0	Commentaires
Essilor	0,54	-31,03	0,21	93,48	6,52	0,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Essilor D1	0,56	-29,73	0,23	88,23	10,70	1,07	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Essilor D6	0,49	-34,07	0,42	74,40	3,87	5,60	7,44	8,70	Non Robuste forte Volatilité
Sodexo	0,64	-22,65	0,16	97,39	2,11	0,50	0,00	0,00	Robuste Volatilité moyenne
Sodexo D1	0,61	-24,26	0,15	98,20	1,76	0,04	0,00	0,00	Robuste Volatilité moyenne
Sodexo D6	0,61	-25,10	0,52	64,89	6,02	15,75	11,27	2,07	Non Robuste forte Volatilité
Danone	0,65	-23,83	0,12	99,62	0,38	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Danone D1	0,68	-22,11	0,12	99,50	0,50	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Danone D6	0,73	-22,82	0,4	74,17	4,87	14,14	4,06	2,76	Non Robuste forte Volatilité
Ricard	0,69	-17,89	0,11	100,00	0,00	0,00	100,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Ricard D1	0,66	-19,49	0,11	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Ricard D6	0,99	-0,98	0,32	73,82	4,02	21,81	0,15	0,19	Non Robuste forte Volatilité
Publicis	0,72	-17,93	0,07	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Publicis D1	0,69	-19,71	0,08	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Publicis D6	0,86	-8,83	0,44	52,09	6,17	35,72	2,99	3,03	Non Robuste forte Volatilité
L'Oréal	0,72	-19,97	0,12	97,82	2,19	0,00	0,00	0,00	Robuste Volatilité faible
L'Oréal D1	0,76	-16,91	0,13	91,68	6,94	1,38	0,00	0,00	Robuste Volatilité faible
L'Oréal D6	0,81	-17,15	0,27	80,64	10,31	8,43	0,15	0,46	Plutot Robuste forte Volatilité
Orange	0,73	-17,60	0,21	70,83	12,46	16,71	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Orange D1	0,75	-16,84	0,22	69,72	9,66	20,62	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Orange D6	0,59	-26,86	0,57	61,52	4,45	26,22	4,83	2,99	Non Robuste forte Volatilité
Vivendi	0,79	-15,26	0,11	93,18	3,11	3,72	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Vivendi D1	0,80	-14,45	0,14	77,00	16,02	6,98	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité moyenne
Vivendi D6	0,75	-16,04	0,34	73,25	11,19	14,83	0,04	0,69	Plutot Robuste forte Volatilité
Air Liquide	0,83	-14,93	0,11	83,40	16,60	0,00	0,00	0,00	Plutot Robuste faible Volatilité
Air Liquide D1	0,87	-11,49	0,11	58,80	35,91	5,29	0,00	0,00	Plutot Robuste faible Volatilité
Air Liquide D6	0,60	-34,32	0,21	95,63	1,15	1,57	0,65	0,99	Robuste forte Volatilité
Carrefour	0,90	-5,75	0,21	56,42	13,91	29,67	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Carrefour D1	0,90	-5,93	0,21	56,27	17,67	26,06	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Carrefour D6	0,75	-12,81	0,58	47,64	7,01	35,95	8,51	0,88	Non Robuste forte Volatilité
Veolia	0,92	-3,90	0,20	80,38	2,77	16,86	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Veolia D1	0,86	-6,84	0,21	83,06	3,30	13,64	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Veolia D6	1,34	15,43	0,54	22,23	8,32	66,84	2,34	0,27	Non Robuste forte Volatilité
Total	0,93	-5,77	0,13	60,98	24,49	14,53	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité moyenne
Total D1	0,94	-5,30	0,14	59,68	19,05	21,27	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité moyenne
Total D6	0,83	-12,86	0,34	49,75	14,53	35,72	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
GDF	0,94	-3,57	0,09	58,80	40,94	0,27	0,00	0,00	Plutot Robuste faible Volatilité
GDF D1	0,93	-3,83	0,11	54,00	36,30	9,70	0,00	0,00	Plutot Robuste faible Volatilité
GDF D6	0,80	-13,68	0,36	64,24	10,04	25,70	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Airbus	0,95	-2,00	0,17	47,79	20,55	31,66	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Airbus D1	0,93	-3,20	0,18	49,75	25,60	24,65	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Airbus D6	1,19	7,20	0,68	30,82	5,63	57,34	4,98	1,23	Non Robuste très forte Volatilité

### 3.3 : Pour les actions avec un $\beta > 1$

Action avec Beta > 1	Beta Global	tstat à 1	ET	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <0	% beta = 0	Commentaires
Technip	1,05	1,99	0,22	35,42	21,51	43,08	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Technip D1	0,99	-0,31	0,23	40,21	23,57	36,22	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Technip D6	1,05	2,06	0,64	39,29	11,27	47,68	1,76	0,00	Non Robuste Très forte Volatilité
Bouygues	1,06	3,02	0,14	32,00	20,09	47,91	0,00	0,00	Non Robuste Volatilité moyenne
Bouygues D1	1,06	3,14	0,15	31,47	17,63	50,90	0,00	0,00	Non Robuste Volatilité moyenne
Bouygues D6	1,11	5,03	0,66	40,82	3,83	52,28	1,99	1,07	Non Robuste Très forte Volatilité
Michelin	1,08	3,70	0,17	24,65	30,29	45,07	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Michelin D1	1,01	0,61	0,19	40,24	28,25	31,51	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Michelin D6	1,16	8,59	0,52	42,39	6,59	49,98	0,12	0,92	Non Robuste forte Volatilité
Vinci	1,11	7,85	0,16	19,66	19,86	60,48	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Vinci D1	1,12	8,16	0,18	27,64	13,72	58,64	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Vinci D6	1,04	3,10	0,38	47,11	10,66	42,12	0,00	0,11	Non Robuste Très forte Volatilité
PSA	1,17	6,04	0,15	12,46	12,11	75,43	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité moyenne
PSA D1	1,04	1,50	0,16	25,11	31,74	43,16	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
PSA D6	1,08	2,84	0,9	30,70	4,64	53,32	10,50	0,84	Non Robuste Très forte Volatilité
Alcatel	1,22	6,66	0,17	8,43	17,79	73,78	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Alcatel D1	1,11	3,52	0,2	21,85	8,93	69,22	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Alcatel D6	1,75	21,39	0,73	12,80	3,80	79,72	2,57	1,11	Plutot Robuste Très forte Volatilité
Schneider	1,24	14,72	0,14	4,40	8,06	87,54	0,00	0,00	Robuste Volatilité moyenne
Schneider D1	1,25	15,70	0,17	7,55	6,32	86,13	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Schneider D6	1,08	5,12	0,39	30,20	10,16	56,38	2,07	1,19	Non Robuste forte Volatilité
St-Gobain	1,34	19,45	0,18	3,68	11,27	85,05	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
St-Gobain D1	1,31	17,80	0,17	4,37	6,55	89,08	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
St-Gobain D6	1,49	26,85	0,46	21,23	5,29	73,48	0,00	0,00	Plutot Robuste forte Volatilité
Renault	1,36	15,48	0,17	0,00	4,22	95,78	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Renault D1	1,22	10,18	0,15	8,74	17,52	73,75	0,00	0,00	Plutot Robuste Volatilité moyenne
Renault D6	2,01	41,45	0,66	12,99	2,72	82,83	1,00	0,46	Robuste VolatilitéTrès forte
BNP	1,39	18,84	0,21	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte volatilté
BNP D1	1,37	19,23	0,17	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte volatilté
BNP D6	1,07	3,46	0,51	27,14	5,33	66,85	0,43	0,27	Plutot Robuste Très forte Volatilité
CA	1,44	18,46	0,23	0,81	2,04	97,16	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
CA D1	1,37	16,03	0,2	1,00	2,91	96,09	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
CA D6	1,52	21,08	0,49	6,94	2,15	90,92	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
SG	1,47	19,28	0,30	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
SG D1	1,38	17,27	0,28	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
SG D6	1,91	39,46	0,33	6,63	2,91	90,46	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
AXA	1,51	26,20	0,21	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Axa D1	1,45	24,44	0,18	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Axa D6	1,77	36,99	0,61	18,67	4,52	76,62	0,11	0,08	Plutot Robuste Très forte Volatilité

On peut synthétiser la globalité des informations contenus dans ces tableaux par les commentaires suivants :

- Quel que soit le Profil-Risque initial :
  - Les valeurs des écarts-types des  $\beta_{TF}$  sur D6 sont très importantes.
  - Les valeurs des écarts-types des Betas de D1 sont toujours inférieurs à celles de D6.
  - La volatilité des Betas à Long-Terme est donc foncièrement différente de celle de Court-Terme.
- La volatilité des  $\beta_{TF}$  de Long-Terme (D6) est totalement différente de celle des  $\beta_r$  pour toutes les actions : les changements de Profil-Risque au niveau fréquentiel, c'est à dire les profils pour lesquels le Beta de long-terme n'est pas dans la même catégorie que celui du Beta Global, sont observés plus particulièrement pour Ricard, Veolia, Airbus, Accor, LVMH et Cap Gemini.
- La volatilité des  $\beta_{TF}$  de Court-Terme (D1) comparée à celle des  $\beta_r$  présente moins de différence que celle observée à long-terme (D6). La dynamique du Profil-Risque de court-terme se rapproche donc de celle du Profil global. On note, cependant, des exceptions pour les actions Accor, Michelin, Technip et PSA pour lesquelles un changement de Profil-Risque s'opère au niveau fréquentiel.

Si on se place du point de vue des différents Profils-Risque par rapport à 1, il est possible de résumer les informations obtenues dans les points suivants :

- Pour les actions dont le Beta est fortement supérieur à 1, la volatilité est forte mais leurs Profils-Risques de courts-termes et de longs termes restent relativement Robustes dans le temps (les  $\beta_{TF}$  calculés sur D1 et D6 fluctuent fortement mais constamment au-dessus de 1).
- Pour les actions dont le Beta est inférieur à 1, les Profils-Risque de courts-termes sont Robustes dans le temps avec une volatilité relativement faible/moyenne. A long-terme, par contre, la volatilité prend suffisamment d'importance pour dégrader la Robustesse. On constate même, dans ce cas, qu'il peut exister des  $\beta_{TF}$  inférieurs ou égaux à 0 ! Certaines actions, cependant, comme l'Oréal, Vivendi et Air Liquide conservent un Profil de long-terme plutôt Robuste.
- Les actions comme Airbus, Cap Gemini, Technip ou Michelin, dont les Betas sont égaux ou proches de 1 statistiquement, possèdent des Profils-Risques de courts-termes majoritairement Non-Robustes du fait de l'importante volatilité des  $\beta_{TF}$  autour de 1. Les actions qui possèdent des volatilités de leurs  $\beta_{TF}$  plus faible (comme par exemple GDF, Total et LVMH) peuvent être considérées comme robuste. A long-terme, en revanche, les plus fortes volatilités des  $\beta_{TF}$  ne permettent pas de conclure à la robustesse des Profils-Risques.

## Conclusion

L'association simultanée des ondelettes avec les fenêtres forward constitue un outil puissant pour l'analyse de la volatilité du Beta de la Droite de Marché. Il est d'une part conceptuellement plus conforme à la réalité et en même temps plus pratique pour les gestionnaires car il peut s'insérer dans un logiciel informatique automatique. La comparaison que nous avons effectuée avec l'approche intuitive montre qu'il existe des différences significatives entre les Betas qui s'accroissent avec l'échelle fréquentielle.

La méthodologie retenue, appliquée aux 30 actions, montre que les Betas possèdent des dynamiques qui se différencient selon leurs termes mais aussi avec la position du Beta par rapport à 1. La Richesse de l'information collectée appelle une synthèse que nous résumons dans le tableau suivant :

	Court Terme	Long Terme
Beta < 1	Volatilité Moyenne Plutôt Robuste --> vers $\beta_r$	Volatilité Forte Non Robuste ≠ des $\beta_r$
Beta = 1	Volatilité Forte Plutôt Robuste* --> vers $\beta_r$	Volatilité plus Forte Non Robuste ≠ des $\beta_r$
Beta > 1	Volatilité Forte Robuste* --> vers $\beta_r$	Volatilité Très Forte Plutôt Robuste* ≠ des $\beta_r$

\* Exceptions notables quand le Beta tend vers 1

L'instabilité du Beta Tempo-Fréquentiel de long-terme est plus forte et différente de celle des  $\beta_r$  quelle que soit la nature de l'action. La volatilité des Betas de court-terme, plus faible, tend vers celle des  $\beta_r$  mais il existe des exceptions liées à des changements de profil fréquentiel. La Robustesse dans le temps des Profils-Risques de Court et de Long Terme dépend de la nature de l'action. Les Profils établis à Court-Terme pour les actions avec un Beta Fort (>1) et Faible (<1) sont relativement Robustes mais plus le Beta se rapproche de 1 plus leur robustesse est altérée. A long-terme, bien qu'ils soient très volatiles, les  $\beta_{TF}$  sont Robustes pour les actions avec un Beta très fort. Le Profil-Risque est ainsi conservé seule l'intensité du Beta varie fortement d'où la nécessité de les analyser avec plus en détails. Pour les actions avec un Beta faible, la plus grande proportion de  $\beta_{TF}$  négatifs ou nuls conduit à

une non-robustesse de leur Profil. Ce résultat montre ainsi qu'une même action peut avoir une pluralité de Profil-Risque lorsqu'on conjugue le cours du temps et les fréquences.

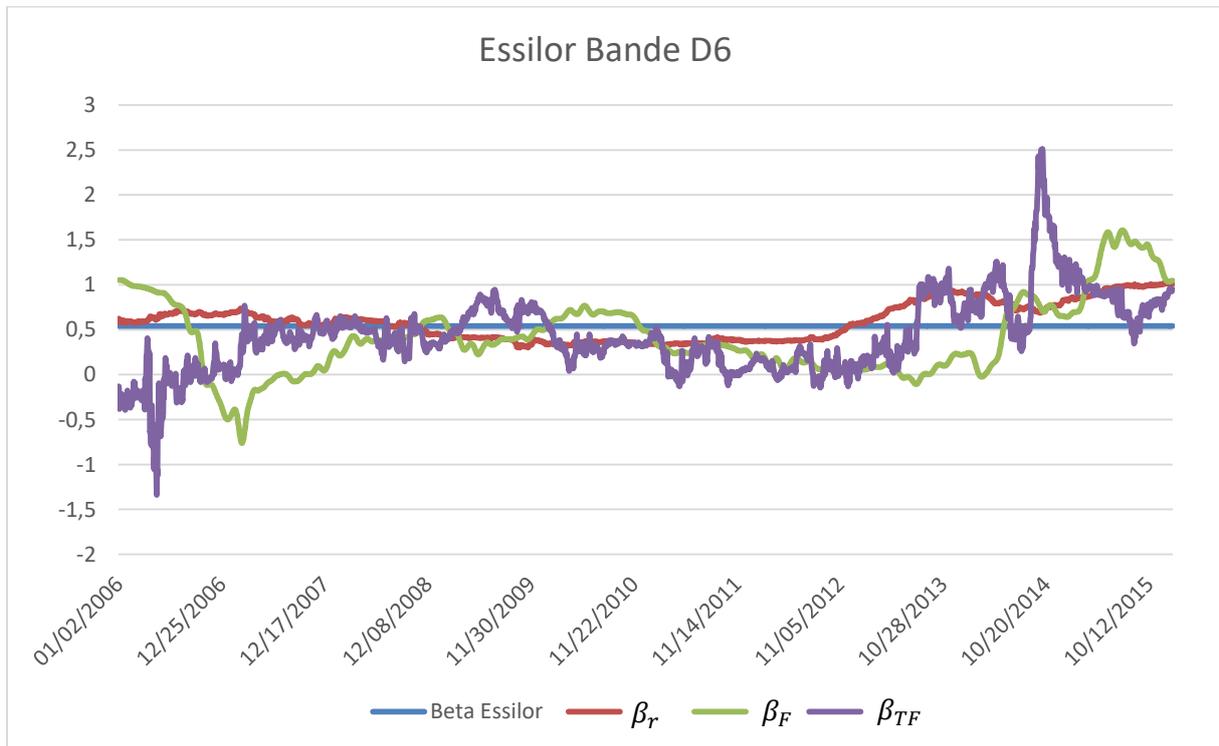
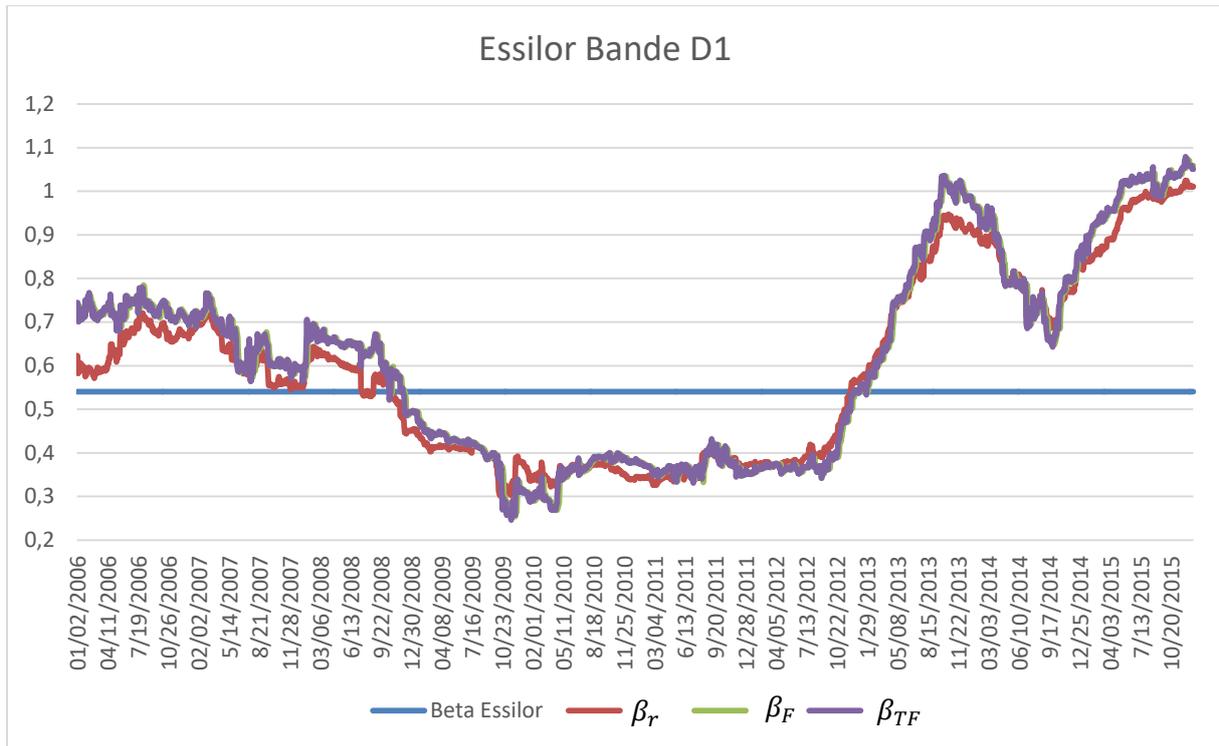
La méthodologie retenue dans cet article permet de bien différencier l'ampleur de la volatilité du Beta de la Droite de Marché selon les fréquences. Elle constitue un outil complémentaire pour les gestionnaires de portefeuilles lors de leurs prises de décision qui collectent de nouvelles informations associant le risque au cours du temps et des horizons de placements. Les progrès technologiques en matière d'informatique permettent une utilisation rapide de ce type d'approche tempo-fréquentielle.

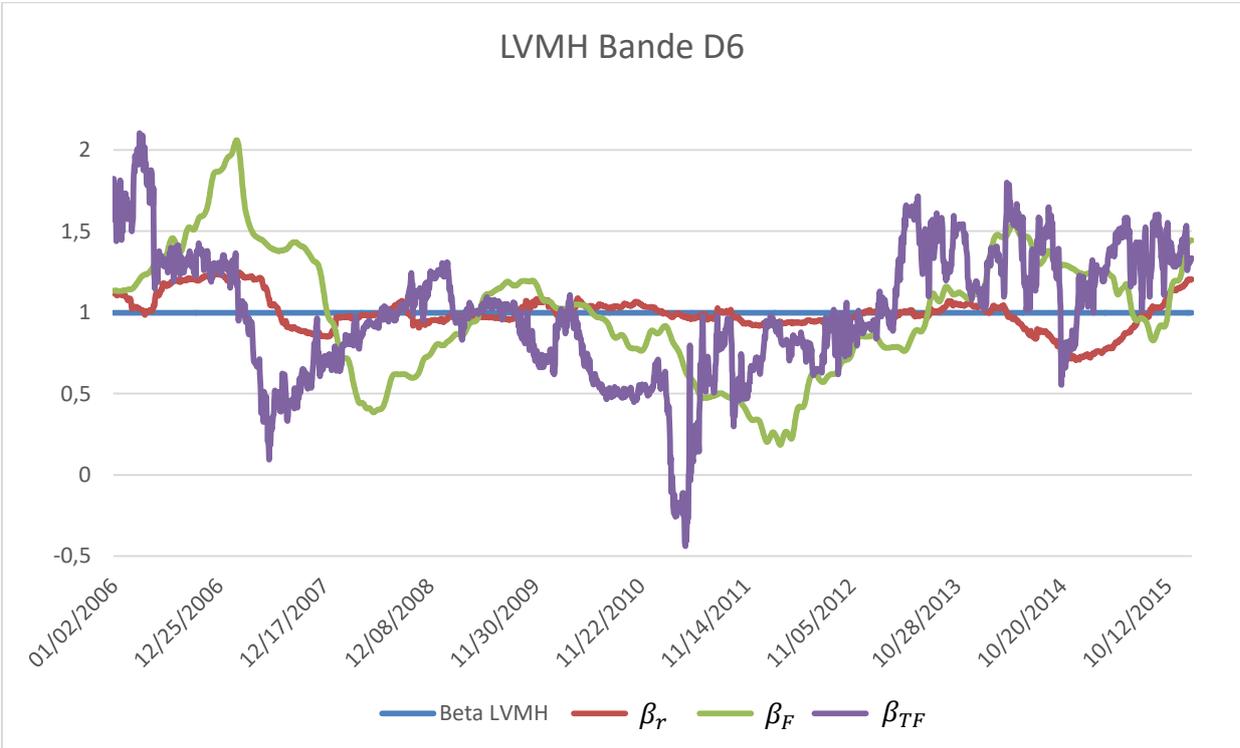
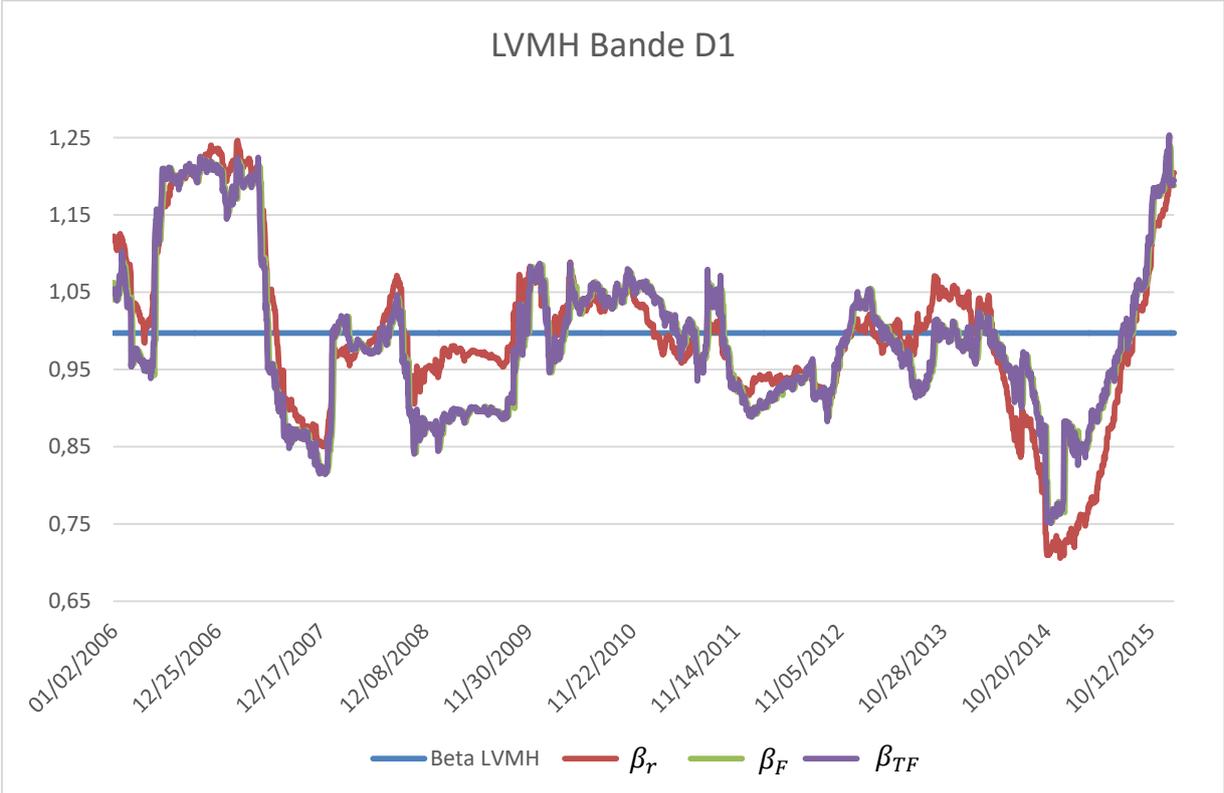
### Annexes

*Table A1 : Bandes de fréquences et horizon temporel*

Résolution	Jours fréquentiels		Correspondance en mois	
	bornes inf	bornes sup	bornes inf	bornes sup
D1	2	4	0,09	0,18
D2	4	8	0,18	0,36
D3	8	16	0,36	0,73
D4	16	32	0,73	1,45
D5	32	64	1,45	2,91
D6	64	128	2,91	5,82
D7	128	256	5,82	11,64
D8	256	512	11,64	23,27
D9	512	1024	23,27	46,55
D10	1024	2048	46,55	93,09
D11	2048	4096	93,09	186,18
S11	4096	-	186,18	-

Figures A2 : Betas Roulants  $\beta_F$ ,  $\beta_{TF}$  pour Essilor et LVMH





## Références

- Brooks R.D., R.W. Faff and J.H.H Lee, “The form of time variation of systematic risk: some Australian evidence”, *Applied financial econometrics*, Vol 2, 1992, pp 191-198.
- Brooks, R.D., R.W. Faff, and M.D. McKenzie, “Time-varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques”, *Australian Journal of Management* 23(1), 1998, pp 1–22.
- I. Daubechies (1992) Ten lectures on wavelets, Conference Series of Applied mathematics in Philadelphia, Society for industrial and applied mathematics.
- R.W. Faff, J.H.H Lee and T.R.L Fry, “Stationarity of systematic risk : some Australian evidence”, *Journal of Finance and Accounting*, Vol 19, Issue 2, 1992 ; pp 253-270.
- R.W. Faff, R.D. Brooks, “Time-varying risk for Australian industry portfolios, an exploratory analysis”, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol 25, Issue 5, 1998, pp 721-74.
- R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, “Systematic Risk and Timescales “, *Quantitative Finance*, Vol 3 issue 2, 2003,pp 108-116.
- A. Grossmann J. Morlet, “Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape” *SIAM Journal on mathematical analysis*, 1984, 15 (4),723–736.
- N. Groenewold and P. Fraser, “Time Varying Betas and Macroeconomic influences”, discussion paper, departement of economics , University of Western Australia, 1997.
- S. Mallat, “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation” ;*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* Vol 11 num 7 July 1989.
- S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ecole polytechnique, 2009.
- S. Mallat ,*Wavelet tour of signal processing: the sparse way*, Academic Press, 2009.
- Mestre R. and Terraza M., “Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40” *Managing Global Transition Journal* .Vol.16 (2) 2018, pp-141-157.
- Y .Meyer, S. Jaffard and O. Rioul, “L’analyse par ondelettes” 1986 *Pour la science*.
- W. Sharpe, “Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk” ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), 1964, pp. 425-442.
- J.Yeo, “Modelling Time-Varying Systematic Risk in Australia”; *Proceedings of the International Congress on Modelling & Simulation*. ed. / F. Ghessemi; M. McAleer; L. Oxley; M. Scoccimarro. Vol. 3, Canberra. ed. Western Australia : Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand Inc., 2001, p. 1565-1570.