MRE
MONTPELLIER
RECHERCHE
ECONOMIE

DOCUMENT DE RECHERCHE
WORKING PAPER

Roman MESTRE et Michel TERRAZA

« Estimations simultanées du Beta
de la droite de marché avec erreurs GARCH»

WP MRE 2019.4

Montpellier Recherche en Economie EA 7491 – Faculté d'Economie
Université de Montpellier - MUSE « Montpellier Université d'Excellence »
Contact : alain.marciano@umontpellier.fr

FACULTÉ D'ÉCONOMIE Université de Montpellier

MUSE MONTPELLIER UNIVERSITÉ D'EXCELLENCE

Estimations simultanées du Beta de la droite de marché avec erreurs GARCH

Roman MESTRE* **Michel TERRAZA^**

Résumé :

Le risque systématique d'une action est estimé par l'équation de la droite de marché et son coefficient Beta. D'après les hypothèses d'application des MCO, les estimateurs sont robustes et les résidus suivent un processus de bruit blanc. Mais divers articles montrent qu'il existe de nombreuses anomalies statistiques (fait stylisés) dans les résidus (hétéroscédasticité, autocorrélation et non-normalité) rejetant les propriétés des estimateurs. Pour prendre en compte ces anomalies nous faisons référence à une classe de processus ARCH pour modéliser l'aléa de la régression qui a prouvé son efficacité dans le domaine de la finance de marché. Nous estimons simultanément les paramètres de la droite de marché avec ceux de l'aléa sur les primes de risque de 30 actions pérennes et celle du CAC40 (indice du marché boursier français) pour la période quotidienne de 2005 à 2015. Nous sélectionnons le modèle E-GARCH qui présente les meilleures caractéristiques des résidus et nous montrons qu'il existe des différences significatives avec les Betas des MCO en particuliers pour ceux supérieurs à 1. Une correction de ces derniers est alors rendue possible par l'estimation de la relation linéaire avec rupture entre les deux catégories de betas proposant aux investisseurs un outil pratique pour ajuster leur comportement.

Mots-Clés : MEDAF, Beta, GARCH, EGARCH,

*Corresponding author. Roman MESTRE, MRE (Groupe de Recherche en Econométrie des Marchés), Université de Montpellier, UFR d'économie Avenue Raymond Dugrand– Site de Richter C.S. 79606 34960 Montpellier CEDEX 2 Courriel : roman.mestre@live.fr

^ MRE, Université de Montpellier

INTRODUCTION

Les travaux de Markowitz (1952) amorcent le départ de la théorie moderne du portefeuille. Mais ce sont Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966) et Black (1972) qui vont développer un modèle central en théorie financière permettant d'identifier de manière simple la relation associant la rentabilité des actifs financiers et leur risque : le MEDAF. Ce modèle de régression à deux variables est basé sur une mesure de risque systématique associée à sa pente et communément appelé le Beta. Sharpe définit le MEDAF par l'équation suivante de la Securities Market Line (ou SML).

$$E(R_i) = \mathrm{rf} + \beta_i(\mathrm{E}(\mathrm{R_m}) - \mathrm{rf}) \qquad (1)$$

E(Ri) est l'espérance de la rentabilité R_i de l'actif i, rf(risk free) est le taux sans risque, $\beta_i$est le beta ou risque systématique, E(R_m) est l'espérance de la rentabilité R_m du marché m.

On utilise, traditionnellement, la réécriture de l'équation SML en termes de prime de risque, appelée droite de marché, pour vérifier empiriquement le MEDAF :

$$\mathrm{r_{i,t}} = \alpha_i + \beta_i \mathrm{r_{m,t}} + \varepsilon_{i,t} \qquad (2)$$

La prime de risque de l'actif i notée $r_{i,t}$(et celle du marché $r_{m,t}$)est l'espérance de rentabilité de l'actif i (respectivement du marché) réduite du taux sans risque rf ; $\varepsilon_{i,t}$ est un processus i.i.d (0,σ_ε).

Les gestionnaires se basent sur le Beta pour apprécier leur niveau de risque systématique car il représente la sensibilité de l'actif i aux mouvements du Marché. Les actions se distinguent alors selon la valeur de leur Beta par rapport à 1 (sensibilité unitaire). Les paramètres de ce modèle sont estimés traditionnellement par les MCO, qui sous les hypothèses de la régression, possèdent les propriétés requises.

Ce modèle, de conception simple, ne permet pas de prendre en compte la complexité des structures des variables qui se traduisent par des phénomènes d'autocorrélation, d'hétéroscédasticité et de non-normalité des résidus. Les estimateurs du modèle (2) ne sont plus, dans ce cas, BLUE et les valeurs estimées du Beta sont non robustes.

De nombreuses études, comme celles de Black, Scholes et Jensen (1972), de Fama et MacBeth (1973), ont montré à la fois l'instabilité et la non-robustesse de l'estimation du Beta. Plusieurs auteurs ont alors pris en compte ces différents phénomènes qui se traduisent au niveau des résidus. On peut citer, par exemple, les travaux de Diebold et al (1988) et de Giaccoto et Ali

(1982) qui confirment la présence d'effets d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité dans le MEDAF. L'utilisation des processus de type (G)ARCH d'Engel (1982) et de Bollerslerv (1986) et leur version multivariée permet alors une identification des processus aléatoires générateurs des variables du modèle de marché pour estimer un Beta plus consistant que celui des MCO (Bera et al [1988], Bollerslerv et al (1988) Schwert et Seguin [1990] puis Corhay et Rad [1996]). Cette approche nécessite de traiter séparément les variables du modèle pour modéliser leur processus générateur.

Une alternative à cette approche consiste à prendre en compte le processus générateur de l'aléa identifié dans les résidus estimés par les MCO et à estimer simultanément l'ensemble des paramètres de la droite de marché.

Pour apprécier ce gain d'information dans le calcul du Beta par l'estimation des paramètres du nouveau modèle, nous recourons, dans cet article, aux données journalières du 1er janvier 2005 au 31 décembre 2015 des 30 primes de risque pérennes sur la période de l'indice CAC40 (n=2868). Nous présentons dans un premier paragraphe les estimations par les MCO puis celles avec des erreurs de type GARCH avant de discuter et de conclure sur les résultats obtenus.

1. Estimations des droites de marché par les MCO

Les résultats de l'estimation par les MCO de la Droite de la Marché sont consignés dans le tableau 1. Les données sont transformées en rendements après avoir vérifié la stationnarité des variables $\mathrm{r}_{\mathrm{i,t}}\ et\ \mathrm{r}_{\mathrm{m,t}}$ (Cf. Bibliographie 16).

Les estimateurs de la constante, pour la majorité des actifs, ne sont pas, ou très peu, significativement différents de zéro (rendements centrés). Les coefficients betas sont tous significatifs et indiquent la nature de l'actif. A titre d'exemple, l'action Société Générale est fortement sensible aux mouvements du marché avec son beta supérieur à 1, Orange, à l'opposé, est moins sensible aux fluctuations et LVMH possède une sensibilité unitaire (elle suit les mouvements du marché dans les mêmes proportions). Les résidus de ces estimations sont autocorrélés, hétéroscédastiques et ne sont pas des échantillons d'une loi normale. Par conséquent, l'estimation du Beta ne respecte plus la propriété de variance minimale et rien ne garantit sa robustesse au cours du temps. Ces calculs permettent, cependant, de classifier, par la suite, les actions selon leurs valeurs significativement différentes de un ou non pour les comparer aux autres estimations.

Tableau 1 : Estimations par les MCO

MCO	Beta	T-Stat	Constante	T-Stat	R^2	LB	ARCH	JB
Accor	0,99	51,02	0,000403	1,458	0,47	13,56	16,489	5812,89
Airbus	0,952	39,709	0,000363	1,06	0,35	13,805	0,83	106016
Alcatel	1,22	36,933	-0,000446	-0,946	0,32	1,342	34,014	14326,7
Air Liquide	0,829	72,39	0,000409	2,5	0,65	13,111	57,429	6729,28
AXA	1,506	77,98	0,000425	1,54	0,68	21,068	62,132	41993,2
BNP	1,391	67,01	0,00012	0,407	0,61	29,637	311,01	36979,6
Bouy	1,059	54,15	0,000157	0,564	0,51	0,302	57,036	1774,4
CA	1,442	60,24	-0,000141	-0,412	0,56	13,967	161,13	7641,56
Carrefour	0,9	51,769	-3,39E-05	-0,136	0,48	2,829	76,199	3926,46
Danone	0,651	44,46	0,000277	1,326	0,41	9,193	231,21	4778,36
Essilor	0,537	35,986	0,000501	2,337	0,31	11,916	105,44	16498,4
GDF	0,937	53,0549	9,33E-05	0,37	0,5	30,291	20,303	164186
Gemini	1,036	51,889	0,000476	1,67	0,48	10,449	14,254	2722,26
St-Gobain	1,342	76,32	3,65E-05	0,1455	0,67	12,369	222,051	15224,2
L'Oréal	0,722	51,86	0,000346	1,74	0,48	26,829	40,735	4951,32
LVMH	0,997	68,815	3,48E-04	1,68	0,62	13,242	38,34	10867,6
Michelin	1,076	52,33	0,000281	0,958	0,49	13,963	29,17	3655,4
Orange	0,725	46,389	3,50E-05	0,157	0,43	17,703	37,808	4480,43
PSA	1,165	42,62	-0,000211	-0,543	0,39	7,69	116,57	1614,53
Publicis	0,72	46,117	0,000306	1,3758	0,43	28,876	70,499	1972,62
Renault	1,355	59,074	0,00019	0,581	0,55	12,358	121,996	2371,17
Ricard	0,69	39,82	0,000327	1,323	0,36	31,548	143,779	8181,13
Schneider	1,235	77,377	0,000412	1,81	0,68	25,787	41,245	976,496
Sodexo	0,638	39,916	0,000502	2,2	0,36	10,205	21,254	9219,78
SG	1,473	60,035	-0,000106	-0,304	0,56	65,509	304,568	13567,8
Technip	1,049	42,588	0,000113	0,32	0,39	17,01	30,72	6149,54
Total	0,93	76,657	0,000183	1,0589	0,67	11,817	155,558	2095,14
Veolia	0,917	43,056	2,78E-05	0,092	0,39	8,307	1,582	160406
Vinci	1,114	76,715	0,000434	2,096	0,67	5,194	208,294	5024,85
Vivendi	0,786	56,05	9,86E-05	0,4935	0,52	4,9	16,845	7732,78

Pour un risque de 5%, Ligne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11.1$; Ligne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(5)=11,1$

Ligne J-B (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$. Pour un seuil de 5%. Les R^2 sont tous significatifs.

2. Estimations des droites de marché avec erreurs GARCH

Les caractéristiques de la distribution des résidus issus des estimations précédentes (Asymétrie, leptokurticité, …) impliquent que leurs modélisations soient associées aux différents processus GARCH qui ont prouvés leurs efficacités en finance de marché.

Pour prendre en considération l'autocorrélation des résidus nous recourrons à un processus ARMA dont l'ordre est sélectionné, d'une part, en minimisant le critère d'Akaike et, d'autre part, en vérifiant la significativité des paramètres. Le processus AR(1) présente le meilleur compromis associé aux modèles GARCH de Bollerserv (1986) et EGARCH de Nelson (1991). Les choix et les ordres de ces modèles résultent de leurs capacités à blanchir les résidus tout en assurant la significativité de leurs paramètres. L'utilisation d'autres processus GARCH, qui ne respectent ces critères, ont été écartés de cette étude [1]. L'estimation des paramètres du modèle de régression avec des erreurs obéissant à ce type de processus peut être réalisée de différentes façons. La plus courante est celle des Moindres Carrés Généralisés qui calcule les paramètres de la régression puis recherche et estime les paramètres du processus générateur des résidus pour construire sa matrice des variances-covariances utilisée par la suite pour l'estimation définitive des paramètres du modèle. Nous lui préférons une autre procédure permettant l'estimation simultanée des paramètres basée sur la méthode du maximum de vraisemblance associée à l'algorithme d'optimisation non-linéaire du Point Intérieur de YE (1992) (ou ses variantes dans le cas où la matrice Hessienne ne converge pas) [2], qui évite les deux étapes de calcul précédentes.

Les résultats des différentes estimations simultanées de la nouvelle droite de marché par l'utilisation des processus AR-GARCH et AR-EGARCH sont consignés dans les tableaux 2.

1-Il en est ainsi du Modèle GJR-GARCH pour lequel les conditions de stationnarité requises ne sont pas respectées.

2- Le logiciel utilisé est le rugarch R-packages de Ghalanos 2015. Il est disponible sur le site de R *https://cran.r-project.org/web/packages/***rugarch/rugarch***.pdf*

Tableaux 2 : Estimations de la droite de Marché avec erreurs AR-GARCH et AR-EGARCH

2.1 : Estimations avec erreurs AR-GARCH

Actions	Constante	Beta	AR(1)	R^2	AIC	BIC	LB	ARCH	JB
Essilor	0,00055 (3,18)	0,545 (0,0169)	-0,0697 (-3,48)	0,31	-6,269	-6,26	2,86	4,51	16527
Sodexo	0,00048 (2,55)	0,559 (0,157)	-0,02 (1,85)	0,35	-6,116	-6,1	0,794	0,799	9386
Danone	0,0003 (1,5)	0,69 (0,015)	0,0003 (0,0148)	0,4	-6,349	-6,34	2,11	2,59	4722
Ricard	0,0003 (1,69)	0,63 (0,0172)	-0,068 (-3,4)	0,35	-6,025	-6,01	5,45	0,49	9388
Publicis	0,0004 (1,99)	0,706 (0,0162)	-0,041 (-2)	0,43	-6,101	-6,09	5,43	2,18	2022
L'Oréal	0,0003 (2,1)	0,73 (0,0153)	-0,07 (-3,69)	0,487	-6,36	-6,35	2,1	4,65	4675
Orange	-0,00 (-0,06)	0,726 (0,0153)	0,059 (3,01)	0,62	-6,122	-6,11	2,11	0,524	4580
Vivendi	0,00016 (0,89)	0,79 (0,0147)	0,005 (0,27)	0,52	-6,339	-6,33	1,48	0,126	7745
Air Liquide	0,0004 (2,77)	0,846 (0,0128)	-0,074 (-3,72)	0,65	-6,75	-6,74	2,22	0,04	7413
Carrefour	0,000 (0,36)	0,88 (0,0179)	0,012 (0,54)	0,48	-5,96	-5,95	1,58	0,93	3846
Veolia	0,0006 (2,45)	0,829 (0,021)	0,019 (0,9)	0,39	-5,639	-5,62	0,24	0,48	151590
Total	0,0002 (1,34)	0,89 (0,0124)	0,016 (0,81)	0,67	-6,689	-6,76	2,58	0,83	2246
GDF	-0,00 (-0,17)	0,96 (0,018)	0,057 (2,39)	0,49	-5,93	-5,92	4,23	0,32	152370
Airbus	0,0006 (1,96)	0,94 (0,0245)	0,04 (1,93)	0,35	-5,31	-5,3	4,53	0,046	105740
Accor	0,0005 (2,20)	0,96 (0,021)	-0,047	0,48	-5,689	-5,68	1,14	0,12	5663
LVMH	0,0003 (1,72)	1,02 (0,0157)	-0,042 (-2,15)	0,43	-6,301	-6,29	1,34	0,365	10840
Gemini	0,0007 (2,66)	1,01 (0,021)	-0,044 (-2,27)	0,49	-5,59	-5,58	2,09	0,856	2764
Technip	0,0004 (1,39)	0,979 (0,0265)	-0,021 (-1,01)	0,39	-5,215	-5,2	3,35	2,22	6295
Bouy	0,0002 (0,8)	1,01 (0,0214)	-0,052 (-2,506)	0,5	-5,661	-5,65	0,72	0,55	17807
Michelin	0,0003 (1)	1,026 (0,0215)	0,006 (0,3)	0,49	-5,612	-5,6	4,02	1,89	3556
Vinci	0,0005 (3,04)	1,068 (0,016)	-0,037 (-1,82)	0,67	-6,333	-6,32	1,46	1,11	5174
PSA	0,0001 (0,3)	1,13 (0,026)	0,029 (1,48)	0,39	-5,11	-5,09	3,55	4,11	1549
Alcatel	-0,0005 (-1,28)	1,17 (0,034)	0,018 (0,92)	0,32	-4,631	-4,62	1,046	0,133	14338
Schneider	0,0003 (1,64)	1,20 (0,0172)	-0,035 (-1,86)	0,68	-6,069	-6,06	9,44	2,73	1043
St-Gobain	0,0002 (0,92)	1,25 (0,018)	-0,059 (-2,96)	0,67	-6,022	-6,01	1,72	0,26	15784
Renault	0,0003 (1,02)	1,269 (0,024)	0,04 (1,87)	0,55	-5,419	-5,4	1,31	1,844	2299
BNP	0,0002 (1,1)	1,289 (0,0177)	0,07	0,61	-6,06	-6,05	2,97	0,378	40159
CA	-0,000 (-0,38)	1,34 (0,0244)	0,049 (2,48)	0,56	-5,453	-5,44	2,66	1,11	7849
SG	0,0003 (1,13)	1,319 (0,0218)	0,078 (3,77)	0,56	-5,633	-5,62	5,16	1,7	10812
AXA	0,0007 (3,14)	1,32 (0,0189)	0,055 (2,51)	0,67	-5,932	-5,92	2,57	0,26	43151

Pour un risque de 5%, Ligne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11.1$; Ligne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(5)=11,1$

Ligne J-B (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$. Pour un seuil de 5%, Les R^2 sont tous significatifs.

Les T-stat sont consignées entre parenthèses.

2.2 : Estimations avec erreurs AR-EGARCH

Actions	Constante	Beta	AR(1)	R^2	AIC	BIC	LB	ARCH	JB
Essilor	0,00054 (3,57)	0,526 (0,0155)	-0,068 (-3,68)	0,31	-6,27	-6,26	2,02	3,59	16301
Sodexo	0,00038 (1,65)	0,576 (0,0151)	-0,052 (-2,38)	0,35	-6,142	-6,12	0,41	0,72	9359
Danone	0,00035 (2)	0,697 (0,0141)	-0,009 (-0,44)	0,41	-6,352	-6337	4,11	2,26	4732
Ricard	0,00037 (2,72)	0,627 (0,0178)	-0,067 (-3,9)	0,355	-6,037	-6,02	5,79	0,386	9427
Publicis	0,0003 (2,84)	0,699 (0,181)	-0,042 (-3,73)	0,43	-6,108	-6,09	6	0,76	2019
L'Oréal	0,00035 (3,57)	0,75 (0,0135)	-0,07 (-4,48)	0,486	-6,37	-6,36	1,34	2,04	4675
Orange	-0,000 (-1,05)	0,72 (0,0198)	0,059 (4,58)	0,43	-6,13	-6,12	2,27	0,46	4566
Vivendi	0,0001 (0,57)	0,787 (57,15)	0,0015 (0,007)	0,52	-6,349	-6,34	1,51	0,16	7736
Air Liquide	0,0004 (2,77)	0,85 (65,12)	-0,088 (-4,86)	0,65	-6,76	-6,74	2,9	0,21	7518
Carrefour	-0,00 (-0,86)	0,865 (49,29)	0,008 (0,648)	0,48	-5,98	-5,97	1,32	1,14	3813
Veolia	0,0003 (1,41)	0,833 (43,33)	0,016 (1,03)	0,39	-5,657	-5,64	0,24	1,35	152130
Total	0,0002 (1,46)	0,887 (73,466)	0,02 (0,96)	0,67	-6,69	-6,68	2,47	0,68	2273
GDF	0,000 (0,39)	0,95 (67,09)	0,099 (5,52)	0,49	-5,967	-5,95	11,6	0,33	148170
Airbus	0,0003 (0,91)	0,945 (42,38)	0,03 (1,54)	0,35	-5,336	-5,32	3,94	0,17	105930
Accor	0,0004 (1,69)	0,95 (41,56)	-0,055 (-2,65)	0,48	-5,694	-5,68	1,4	1,07	5617
LVMH	0,0002 (72,78)	1,02 7(72,78)	-0,05(-3,07)	0,62	-6,327	-6,31	1,79	0,31	10806
Gemini	0,00045 (1,66)	0,99 (34,398)	-0,043 (-2,25)	0,484	-5,609	-5,6	2,27	0,35	2782
Technip	0,0003 (0,897)	0,99 (36,04)	-0,029 (-1,45)	0,39	-5,218	-5,2	3,22	1,22	6331
Bouy	0,0002 (0,95)	0,99 (51,51)	-0,04 (-1,84)	0,5	-5,668	-5,65	0,24	0,84	17744
Michelin	0,0003 (1,72)	1,026 (45,12)	0,002 (0,08))	0,49	-5,623	-5,6	4,46	2,41	3560
Vinci	0,0004 (2,88)	1,062 (72,54)	-0,036 (-1,66)	0,67	-6,342	-6,33	1,12	0,875	5150
PSA	0,000 (0,43)	1,13 (44,96)	0,036 (2,07)	0,39	-5,121	-5,1	3,63	0,07	1539
Alcatel	-0,0004 (-1,022)	1,13 (37,52)	0,022 (1,02)	0,32	-4,663	-4,65	0,846	1,56	14264
Schneider	0,00026 (1,85)	1,19 (70,67)	-0,046 (-3,15)	0,68	-6,075	-6,06	9,93	2,533	1063
St-Gobain	0,000 (0,35)	1,25 (64,51)	-0,061 (-3,11)	0,67	-6,034	-6,02	2,04	0,23	15825
Renault	0,000 (0,39)	1,268 (54,9)	0,046 (2,47)	0,55	-5,423	-5,41	1,16	2,05	2262
BNP	0,00015 (0,81)	1,289 (77,32)	0,075 (3,8)	0,61	-6,062	-6,05	2,94	0,96	40217
CA	-0,0003 (-1,15)	1,347 (36,26)	0,043 (2,18)	0,56	-5,459	-5,44	2,62	1,58	7842
SG	0,000 (0,23)	1,305 (63,02)	0,099 (4,92)	0,56	-5,638	-5,62	5,07	4,53	10525
AXA	0,0004 (1,18)	1,287 (42,45)	0,025 (0,9)	0,67	-5,96	-5,95	4,38	0,013	43151

Pour un risque de 5%, Ligne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)$=11.1; Ligne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(5)$=11,1

Ligne J-B (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)$=5,99. Pour un seuil de 5%, Les R^2 sont tous significatifs.

Les T-stat sont consignées entre parenthèses.

Ces estimations amènent les considérations suivantes :

- Les modèles estimés avec erreurs GARCH et EGARCH possèdent des Betas pratiquement identiques. Ils se révèlent efficaces pour prendre en compte l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité des résidus issus des MCO. La distribution de ces derniers reste cependant éloignée de la Loi Normale ce qui affaiblit la puissance des différents tests en particuliers ceux des paramètres estimés.

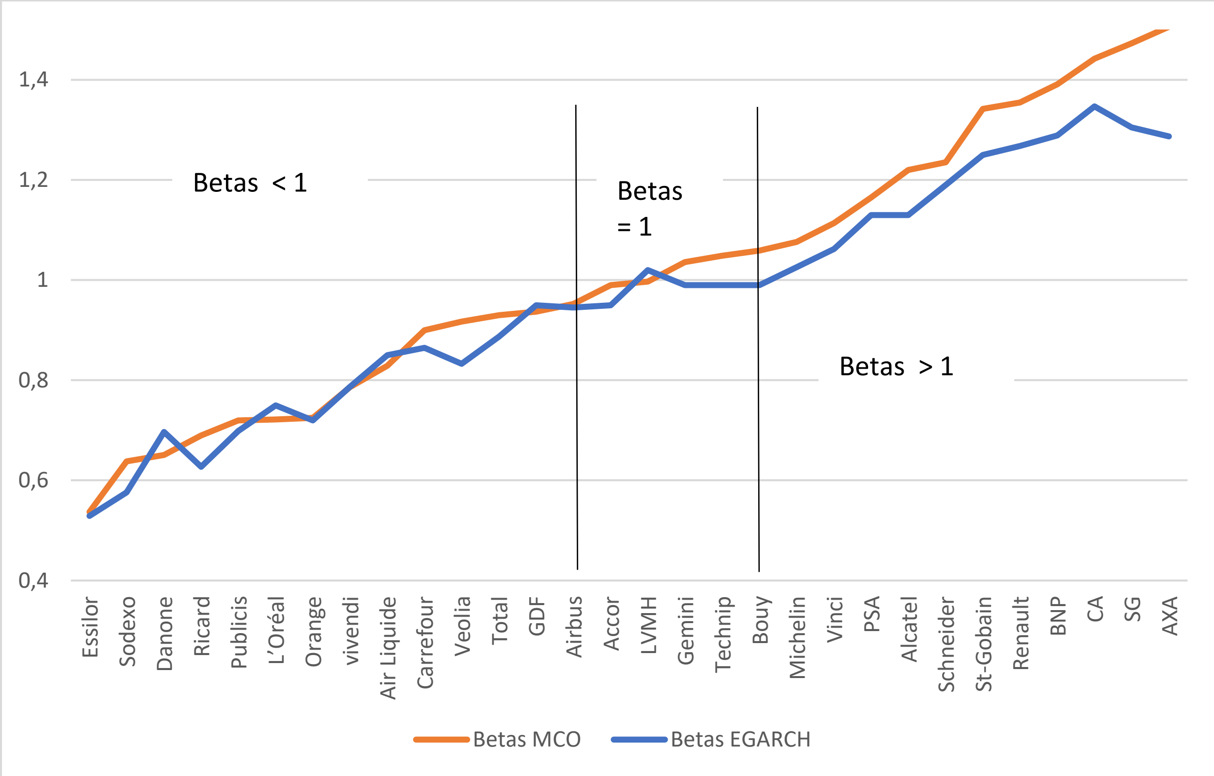
- Les estimations retenues ne sont pas homogènes quelle que soit l'action. Les tests d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité ont été ajusté pour les processus ARMA-GARCH par des tests pondérés de Ljung-Box et ARCH de Fisher et Gallagher (2012). La plupart de ces tests sont calculés pour des retards d'ordre 5 mais dans les cas Michelin, LVMH, GDF et Sodexo les retards sont portés à l'ordre 6 compte tenu des retards p et q de leurs GARCH et EGARCH qui sont différents de un comme pour la majorité des actions.

- La proximité des résultats issus des estimations rend difficile la sélection d'un modèle unique basée sur les seuls critères d'estimation (AIC et BIC) ou sur la qualité des estimateurs. Nous retenons cependant, par la suite, les modèles EGARCH qui possèdent leur constante dans l'équation de la variance significative pour toutes les actions contrairement aux processus GARCH où elle est le plus souvent nulle (ce qui modifie les caractéristiques de stationnarité du processus).

3. Discussions - Conclusion

La sélection du modèle AR(1)-EGARCH pour ce panel d'actions peut être soumise à une analyse statistique comparative avec les résultats de l'estimation par les MCO de la droite de marché. Le graphique 1 indique, pour chaque action, son beta MCO et son Beta estimé avec les processus AR(1)-EGARCH (p,q).

Figure 1. Betas des MCO et Betas EGARCH



En abscisses sont portées les actions classées par le beta issu des MCO par ordre croissant, les deux traits verticaux indiquent les actions avec un beta inférieurs, égal ou supérieur à 1.

Ce graphique met en évidence une différence plus ou moins importante selon sa proximité à la valeur 1 : pour les betas inférieurs ou égaux à 1 les différences apparaissent comme peu significatives contrairement à celles supérieures à 1. Ces différences s'accentuent au-delà de l'action LVMH.

Le tableau 3 précise ce constat par le calcul des différences entre les Betas des MCO et les Betas EGARCH en valeurs et en pourcentages.

Tableau 3 : Comparaisons des Betas

Actions	Betas MCO	Betas EGARCH	Différences	Différences en %
Essilor	0,537	0,529	0,01	1,862
Sodexo	0,638	0,576	0,062	9,717*
Danone	0,651	0,697	-0,046	-7,066*
Ricard	0,69	0,627	0,063	9,130*
Publicis	0,72	0,699	0,021	2,917
L'Oréal	0,722	0,75	-0,028	-3,878
Orange	0,725	0,72	0,005	0,690
Vivendi	0,786	0,787	-0,001	-0,127
Air Liquide	0,829	0,85	-0,021	-2,533
Carrefour	0,9	0,865	0,035	3,889
Veolia	0,917	0,833	0,084	9,160*
Total	0,93	0,887	0,043	4,623*
GDF	0,937	0,95	-0,013	-1,387
Airbus	0,952	0,945	0,007	0,735
Accor	0,99	0,95	0,04	4,040
LVMH	0,997	1,02	-0,023	-2,307
Gemini	1,036	0,99	0,046	4,440
Technip	1,049	0,99	0,058	5,529
Bouy	1,059	0,99	0,069	6,516*
Michelin	1,076	1,026	0,05	4,647
Vinci	1,114	1,062	0,052	4,668*
PSA	1,165	1,13	0,035	3,004
Alcatel	1,22	1,13	0,09	7,377*
Schneider	1,235	1,19	0,045	3,644
St-Gobain	1,342	1,25	0,092	6,855*
Renault	1,355	1,268	0,087	6,421*
BNP	1,391	1,289	0,102	7,332*
CA	1,442	1,347	0,095	6,588*
SG	1,473	1,305	0,168	11,405*
AXA	1,506	1,287	0,219	14,542*

* indique une différence significative entre les deux betas.

Le classement des actions par les Betas issus des MCO et ceux estimés par les EGARCH est sensiblement le même. Il présente, cependant, quelques différences comme pour Accor qui possède un Beta des MCO égal à 1 et un Beta EGARCH inférieur, ou encore Bouygues et Michelin qui ont un Beta des MCO supérieur à 1 mais un Beta EGARCH significativement égal à 1. La classification des actions n'est ainsi remise en question que pour certains actifs dont le Beta est proche de 1.

Les différences entre les Betas sont majoritairement significatives pour les actifs avec un beta fort. Lorsqu'elles sont exprimées en pourcentages elles fournissent une vision globale de l'erreur qu'il est possible de commettre avec l'estimateur des MCO. Elles sont majoritairement positives ce qui indique que les MCO surestiment le risque systématique.

Ces résultats suggèrent qu'une correction peut être rendue possible par la construction d'un modèle de régression prenant en compte l'écart entre les estimateurs des MCO et ceux des EGARCH avec la rupture observée de part et d'autre de LVMH. En considérant les Betas issus des MCO comme variable explicative et ceux du modèle EGARCH comme variable expliquée, le modèle s'écrit sous sa forme matricielle :

$$Beta^{EGARCH} = X.A + \varepsilon$$

Avec $Beta^{EGARCH}$ une matrice (30,1) contenant les Betas estimés avec l'EGARCH

X est une matrice (30,4) contenant les Betas des MCO tel que

c_1	$Beta_1^{MCO}$	c_2	$Beta_2^{MCO}$
1	0,537	0	0
1	0,638	0	0
1	0,651	0	0
1	0,69	0	0
1	0,72	0	0
1	0,722	0	0
1	0,725	0	0
1	0,786	0	0
1	0,829	0	0
1	0,9	0	0
1	0,917	0	0
1	0,93	0	0
1	0,937	0	0
1	0,952	0	0
1	0,99	0	0
1	0,997	0	0
0	0	1	1,036
0	0	1	1,049
0	0	1	1,059
0	0	1	1,076
0	0	1	1,114
0	0	1	1,165
0	0	1	1,22
0	0	1	1,235
0	0	1	1,342
0	0	1	1,355
0	0	1	1,391
0	0	1	1,442
0	0	1	1,473
0	0	1	1,506

A une matrice (4,1) consignant les estimateurs tel que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,1} \\ \alpha_{0,2} \\ \alpha_{1,2} \end{bmatrix}$$

Le tableau 4 résume les résultats de cette estimation de ce MLGS.

Tableau 4 : Régression des Beta EGARCH sur les Betas MCO

	$\alpha_{0,1}$	$\alpha_{0,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$
Valeurs	0,0017	0,216	0,979	0,757
T-Stat	0,032	2,939	15,217	12,979

Test	R^2	BG (2)	White	JB
	0,98	0,83	6,82	1,19

Colonne BG = Test de Breusch-Godfey à 2 retards   Colonne White = Test de White

Cette régression présente les qualités nécessaires (non-autocorrélation, homoscédasticité et normalité) pour que les hypothèses de la régression conduisent à une estimation BLUE des paramètres. Le coefficient de détermination proche de un indique que la variance des betas EGARCH estimés est pratiquement expliquée par celle des betas MCO.

Les paramètres $\alpha_{1,1}$ et $\alpha_{1,2}$ représentent, respectivement, les liens entre les deux Betas pour les actions d'Essilor à LVMH et pour celles de Gemini à AXA. Le test de Chow (égal à 3.33) d'égalité des paramètres accepte faiblement l'hypothèse Ho et celui de Student de leur comparaison indique que les évolutions par actions au-delà de LVMH restent globalement peu significatives. Malgré ceux, on peut exprimer ces différences de pentes de façon plus concrète pour l'utilisateur par l'estimation du modèle non-linéaire doublement logarithmique. Les élasticités instantanées calculées sont respectivement de 1 pour la première moitié des actions et de 0.82 pour les suivantes. Ainsi pour un accroissement de 1% des Betas des MCO correspond un accroissement équivalent des Betas EGARCH avant LVMH alors qu'il est de 0.82% après cette action. Ce pourcentage reflète bien l'écart de plus en plus important constaté sur la Figure 1 ce qui justifie le choix du modèle de régression.

Pour le test de Chow le Fisher tabulée est égal à 3.37 pour un risque de 5% et 5.23 à 1%. Pour le test de Student le T-tabulée est égal à 2.055 à 5% et à 2.78 à 1%.

Les valeurs calculées par la régression précédente constituent les Betas des MCO. Dans le tableau 5 nous fournissons cette correction ainsi que les différences en % avec le Betas des MCO.

Tableau 5 : Corrections des betas

Actions	Betas MCO	Betas Corrigés	Différences en %
Essilor	0,537	0,528	1,738
Sodexo	0,638	0,627	1,787
Danone	0,651	0,639	1,792
Ricard	0,69	0,678	1,807
Publicis	0,72	0,707	1,817
L'Oréal	0,722	0,709	1,818
Orange	0,725	0,712	1,818
Vivendi	0,786	0,772	1,836
Air Liquide	0,829	0,814	1,847
Carrefour	0,9	0,883	1,863
Veolia	0,917	0,9	1,867
Total	0,93	0,913	1,869
GDF	0,937	0,919	1,87
Airbus	0,952	0,934	1,873
Accor	0,99	0,971	1,88
LVMH	0,997	0,978	1,881
Gemini	1,036	1,001	3,393
Technip	1,049	1,011	3,651
Bouy	1,059	1,018	3,845
Michelin	1,076	1,031	4,167
Vinci	1,114	1,06	4,851
PSA	1,165	1,099	5,7
Alcatel	1,22	1,14	6,535
Schneider	1,235	1,152	6,75
St-Gobain	1,342	1,233	8,144
Renault	1,355	1,243	8,298
BNP	1,391	1,27	8,71
CA	1,442	1,308	9,259
SG	1,473	1,332	9,574
AXA	1,506	1,357	9,895

Conclusion :

L'estimation simultanée des paramètres de la droite de marché avec erreurs de type GARCH réduit notablement les phénomènes d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité observés sur les résidus de son estimation par les MCO. Le modèle possède ainsi des propriétés statistiques plus satisfaisantes même si la distribution de ces résidus reste éloignée de la Loi Normale. Les différences entre les Betas des MCO et les Betas EGACH restent peu significatives pour les actions avec un beta inférieur ou égal à 1. On peut donc considérer que le Beta des MCO, communément publié dans des revues financières, est un bon indicateur de son niveau. Pour les autres actions, l'écart des estimations s'amplifie avec leurs éloignements à 1. Nous proposons de ce fait, dans cet article, une correction du Beta des MCO par une régression linéaire avec rupture qui prend en compte ces caractéristiques. Les investisseurs disposent ainsi d'un outil simple, efficace et rapide pour calculer les corrections des betas estimés par les MCO. Ils sont ainsi en mesure de conserver ou de modifier à leur convenance leurs comportements d'investissement.

Bibliographie

1. Bera, A., Bubnys, E. and Park, H. (1988). Conditional heteroscedasticity in the market model and efficient estimates of betas. The Financial Review, Vol. 23, No. 2, p. 201–214.
2. F.Black, M. Jensen, and M. Scholes,1972, ‘The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test’; *Studies in the Theory of Capital Markets* edited by M. Jensen New York: Praeger Publishers.
3. T. Bollerserv, R.Engel and J.Wooldridge ‘A Capital asset pricing model with time-varying covariance’ Journal of political economic vol 96 (1), 1988, pp 116-131.
4. T.Bollerserv Genealized Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, vol 31, 1986, pp 307-327.
5. Corhay, A. – Rad, A. (1996). Conditional heteroscedasticity adjusted market model and an event study. The Quarterly Review of Economics and Finance, Vol. 36. No. 4, p. 529–538.
6. Diebold, F., Jang I. and Jevons L., (1988). Conditional Heteroskedasticity in the Market, Finance and Economics Discussion Series, 42, Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, Washington D.C.
7. Engle, R., (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK inflation, Econometrica, 50: 987-1008.
8. E. Fama and J. MacBeth, ‘Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests’ 81 (3) 1973: 607–636.
9. E. Fama and K. French,‘The Cross-Section of Expected Stock Returns’ ; *Journal of Finance,* 47 (2) 1992: 427–465.
10. T.J Fisher and C. Gallagher. New weighted portmanteau statistics for time series goodness of fit testing. Journal of the American Statistical Association, 107(498):pp 777-787, 2012.
11. Giaccoto, C. and Ali, M.M., (1982). Optimal Distribution Free Tests and Further Evidence of Heteroskedasticity in the Market Model, Journal of Finance, 37: 1247-1257.
12. J. Lintner, ‘The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets’; *Review of Economics and Statistics*. 47 (1) 1965 : 13–37.

13. J. Lintner, ‘Some new perspectives on tests of CAPM and other capital asset pricing models and issues of market efficiency’ ; edited by Harvard Institute of Economic Research, discussion paper, 1981.
14. D. Nelson, Conditional Heteroskedasticity in Asset Return A new Approch, Econometrica Vol 59 (2), 1991, pp 347-370.
15. H. Markowitz,’Portfolio Selection’ *Journal of Finance*, 7 (1) 1952 : 77-91.
16. Mestre R. and Terraza M., “Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40” Managing Global Transition Journal .Vol.16 (2) 2018, pp-141-157
17. J.Mossin, Equilibrium in a Capital Asset Market; Econometrica Vol. 34 1966, pp. 768–783.
18. Schwert G. Seguin, P. (1990): Heteroscedasticity in stock returns. The Journal of Finance, Vol. 45, No. 4, :1129–1155.
19. W. Sharpe Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under risk ; Journal of Finance, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), pp. 425-442.
20. W. Sharpe, G. Cooper Risk -Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931 –1967, Financial Analysis Journal Vol. 28 No. 2 (March-April 1972) pp 46-54.
21. Y. Ye. Interior point algorithms: Theory and analysis, volume 44.1997.